THPT CHUYÊN KHTN HÀ NỘI

Lovebook sưu tầm và giới thiệu

LOVEBOOKCARE

ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA NĂM 2017 LẦN 2

Môn: Toán

***Thời gian làm bài:* 90 phút**

Câu 1: Cho hàm số $y=2x+3\sqrt{9-x^2}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng:

A. -6 **B.** -9 **C.** 9 **D.** 0

Câu 2: Tìm tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1}=\left(2\sqrt{2}\right)^{x+2}$.

A. $\left\{\frac{-2}{11}\right\}$ **B.** $\left\{\frac{2}{11}\right\}$ **C.** $\left\{\frac{11}{2}\right\}$ **D.** $\left\{\frac{-11}{2}\right\}$

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$. Đồ thị hàm số có mấy tiệm cận?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Câu 4: Đồ thị hàm số nào dưới đây không có tiệm cận ngang?

A. $y=x+\sqrt{x^2-1}$ **B.** $y=\frac{x^2}{x-1}$

C. $y=\frac{x+2}{x-1}$ **D.** $y=\frac{x+2}{x^2-1}$

Câu 5: Cho hàm số $y=(m-1)x^3+(m-1)x^2+x+m$. Tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 4, m<1$ **B.** $1<m\le 4$

C. $1<m<4$ **D.** $1\le m\le 4$

Câu 6: Số nghiệm thực của phương trình $2\log_2(x-3)=2+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3-2x}$ là:

A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3

Câu 7: Cho số phức: $z=(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là:

A. -2^{11} **B.** $-2^{11}+2$ **C.** $-2^{11}-2$ **D.** 2^{11}

Câu 8: Tập hợp các điểm bểu diễn các số phức z thỏa mãn phần thực của $\frac{z-1}{z-i}$ bằng 0 là đường tròn tâm I, bán kính R (trừ một điểm):

A. $I\left(\frac{-1}{2};\frac{-1}{2}\right), R=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $I\left(\frac{-1}{2};\frac{-1}{2}\right), R=\frac{1}{2}$

C. $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), R=\frac{1}{2}$ **D.** $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 9: Tìm nguyên hàm $I=\int(2x-1)e^{-x}dx$.

A. $I=-(2x+1)e^{-x}+C$ **B.** $I=-(2x-1)e^{-x}+C$

C. $I=-(2x+3)e^{-x}+C$ **D.** $I=-(2x-3)e^{-x}+C$

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$. Khoảng cách từ điểm $A(1;-2;-3)$ đến mặt phẳng (P) bằng:

A. 2 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 1

Câu 11: Trong các hình nội tiếp mặt cầu tâm I bán kính R, hình hộp có thể tích lớn nhất bằng:

A. $\frac{8}{3}R^3$ **B.** $\frac{8}{3\sqrt{3}}R^3$ **C.** $\frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{3}}R^3$ **D.** $\sqrt{8}R^3$

Câu 12: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính diện tích mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $S=\frac{4\pi a^2}{3}$ **B.** $S=\frac{\pi a^2}{6}$

C. $S=\frac{\pi}{24}a^2$ **D.** $S=\pi a^2$

Câu 13: Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-x-1$ bằng:

A. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

Câu 14: Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(x-1)e^x, y=x^2-1$.

A. $S=e+\frac{8}{3}$ **B.** $S=e+\frac{2}{3}$

C. $S=e-\frac{2}{3}$ **D.** $S=e-\frac{8}{3}$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$, $ASB=60^0$, $BSC=90^0$, $CSA=120^0$. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$ **B.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$

C. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **D.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính thể tích khối nón có đỉnh là tâm hình vuông $ABCD$ và đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$.

A. $V=\frac{\pi}{12}a^3$ **B.** $V=\frac{\pi}{6}a^3$

C. $V=\frac{\pi}{4}a^3$ **D.** $V=\frac{4\pi}{3}a^3$

Câu 17: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-1)e^{2x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=2$.

A. $\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{2}-\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{e^4}{4}-\frac{e^2}{2}-\frac{3}{4}$

C. $\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{2}+\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{e^4}{4}-\frac{e^2}{2}+\frac{3}{4}$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình:

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0.$$

Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu?

A. $I(-1;2;-3)$ và $R=\sqrt{5}$

B. $I(1;-2;3)$ và $R=\sqrt{5}$

C. $I(1;-2;3)$ và $R=5$

D. $I(-1;2;-3)$ và $R=5$

Câu 19: Tính đạo hàm của hàm số $y=e^{x^2}$.

A. $y'=2xe^{x^2}$ **B.** $y'=x^2e^{x^2-1}$

C. $y'=xe^{x^2-1}$ **D.** $y'=2xe^{x^2-1}$

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;-4)$ và $B(1;0;2)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A và B.

A. $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$

B. $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+4}{3}$

C. $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+4}{3}$

D. $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$

Câu 21: Tìm tập nghiệm của phương trình $2^{(x-1)^2}=4^x$.

A. $\{4+\sqrt{3},4-\sqrt{3}\}$ **B.** $\{2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\}$

C. $\{-4+\sqrt{3},-4-\sqrt{3}\}$ **D.** $\{-2+\sqrt{3},-2-\sqrt{3}\}$

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$. Tính khoảng cách từ điểm $M(-2;1;-1)$ tới (d).

A. $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\dfrac{5}{3}$

Câu 23: Tìm nguyên hàm $I=\int x\ln(2x-1)dx$.

A. $I=\dfrac{4x^2-1}{8}\ln|2x-1|+\dfrac{x(x+1)}{4}+C$

B. $I=\dfrac{4x^2+1}{8}\ln|2x-1|+\dfrac{x(x+1)}{4}+C$

C. $I=\dfrac{4x^2-1}{8}\ln|2x-1|-\dfrac{x(x+1)}{4}+C$

D. $I=\dfrac{4x^2+1}{8}\ln|2x-1|-\dfrac{x(x+1)}{4}+C$

Câu 24: Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^2-2x$ và $y=-x^2$ quay quanh trục Ox.

A. $\dfrac{4}{3}$ **B.** $\dfrac{4\pi}{3}$ **C.** $\dfrac{\pi}{3}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$

Câu 25: Cho $\log 2=a;\log 3=b$. Tính $\log_6 90$ theo a,b.

A. $\dfrac{2b-1}{a+b}$ **B.** $\dfrac{b+1}{a+b}$ **C.** $\dfrac{2b+1}{a+b}$ **D.** $\dfrac{2b+1}{a+2b}$

Câu 26: Cho hàm số $y=x^3-3x+2017$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$

Câu 27: Cho số phức $z=2-3i$. Tìm phần ảo của số phức $w=(1+i)z-(2-i)\bar{z}$.

A. $-9i$ **B.** -9 **C.** -5 **D.** $-5i$

Câu 28: Phương trình $4^{x^2}-2^{(x+1)^2}=2x+1-x^2$ có bao nhiêu nghiệm dương?

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Câu 29: Phương trình $\log_2(x^3-2x)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{1+x}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Câu 30: Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-2-i|=|\bar{z}+2i|$ là đường thẳng:

A. $4x-2y+1=0$ **B.** $4x-6y-1=0$

C. $4x+2y-1=0$ **D.** $4x-2y-1=0$

Câu 31: Cho số phức $x=-3-4i$. Tìm môđun của số phức $w=iz+\dfrac{25}{z}$.

A. $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 5 **D.** $\sqrt{5}$

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d_1):\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$ và đường thẳng $(d_2):\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$. Vị trí tương đối của (d_1) và (d_2) là:

A. Cắt nhau **B.** Song song

C. Chéo nhau **D.** Vuông góc

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+1}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng qua điểm $A(3;1;0)$ và chứa đường thẳng (d).

A. $x+2y+4z-1=0$ **B.** $x-2y+4z-1=0$

C. $x-2y+4z+1=0$ **D.** $x-2y-4z-1=0$

Câu 34: Tìm nguyên hàm $I=\int(x-1)\sin 2xdx$.

A. $I=\frac{(1-2x)\cos 2x+\sin 2x}{2}+C$

B. $I=\frac{(2-2x)\cos 2x+\sin 2x}{2}+C$

C. $I=\frac{(1-2x)\cos 2x+\sin 2x}{4}+C$

D. $I=\frac{(2-2x)\cos 2x+\sin 2x}{4}+C$

Câu 35: Phương trình $(x-1)2^x=x+1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 2

Câu 36: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x.\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}}$.

A. $y'=\frac{7.\sqrt[24]{x^7}}{24}$ **B.** $y'=\frac{17.\sqrt[24]{x^7}}{24}$

C. $y'=\frac{17}{24.\sqrt[24]{x^7}}$ **D.** $y'=\frac{7}{24.\sqrt[24]{x^7}}$

Câu 37: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x\sin 2x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\pi$.

A. 2π **B.** $\frac{\pi}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** π

Câu 38: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong tứ giác $ABCD$, các cạnh xuất phát từ đỉnh A của hình hộp đôi một tạo với nhau góc 60^0. Tính thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V=\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$ **B.** $V=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$

C. $V=\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$ **D.** $V=\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$

Câu 39: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB=a$, mặt bên (SAB) hợp với đáy (ABC) một góc 60^0. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{1}{24\sqrt{3}}a^3$ **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$

C. $V=\frac{\sqrt{3}}{8}a^3$ **D.** $V=\frac{\sqrt{3}}{24}a^3$

Câu 40: Số nghiệm thực của phương trình $\log_3(x^3+3x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(x-x^2)=0$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 41: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại C, $AB=AA'=a$, góc giữa BC' và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 60^0. Tính thể tích hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\sqrt{15}a^3$ **B.** $V=\frac{\sqrt{15}}{12}a^3$

C. $V=\frac{3\sqrt{15}}{4}a^3$ **D.** $V=\frac{\sqrt{15}}{4}a^3$

Câu 42: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$. Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -1 có hệ số góc bằng:

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{-1}{6}$ **C.** $\frac{-1}{3}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 43: Tính đạo hàm của hàm số $y=2^{\sqrt{1-x}}$.

A. $y'=\frac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}}2^{\sqrt{1-x}}$ **B.** $y'=\frac{\ln 2}{2\sqrt{1-x}}2^{\sqrt{1-x}}$

C. $y'=\frac{-2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$ **D.** $y'=\frac{2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$

Câu 44: Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)^2.2^x=2x(x^2-1)+4(2^{x-1}-x^2)$ bằng:

A. 4 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 3

Câu 45: Cho $a,b>0, a\neq 1$ thỏa mãn $\log_a b=\frac{b}{4}$ và $\log_2 a=\frac{16}{b}$. Tổng $a+b$ bằng:

A. 12 **B.** 10 **C.** 16 **D.** 18

Câu 46: Tìm tập xác định của hàm số:

$$y=\sqrt{\log(x^2+3x)-1}.$$

A. $(-\infty;-5]\cup[2;+\infty)$ **B.** $(2;+\infty)$

C. $(1;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$

Câu 47: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{1}{4-x^2}dx$.

A. $I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C$ **B.** $I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

C. $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$ **D.** $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C$

Câu 48: Xét các hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=BC=a$. Giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp $S.ABC$ bằng:

A. $\frac{a^3}{12}$ **B.** $\frac{a^3}{8}$ **C.** $\frac{a^3}{4}$ **D.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$

Câu 49: Cho các số phức z thỏa mãn: $|z-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(2-i)z+1$ trên các mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

A. $-x+7y+9=0$ **B.** $x+7y-9=0$

C. $x+7y+9=0$ **D.** $x-7y+9=0$

Câu 50: Số nghiệm thực của phương trình $2^x=\log_2(8-x)$ là:

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

ĐÁP ÁN

1.A	6.B	11.B	16.A	21.B	26.A	31.A	36.C	41.D	46.A
2.A	7.C	12.B	17.A	22.A	27.C	32.A	37.D	42.C	47.D
3.C	8.D	13.C	18.B	23.C	28.B	33.B	38.D	43.A	48.B
4.B	9.A	14.D	19.A	24.C	29.C	34.D	39.D	44.B	49.C
5.D	10.A	15.A	20.C	25.C	30.D	35.D	40.B	45.D	50.B

1A	2A	3C	4B	5D	6B	7C	8D	9A	10A
11B	12B	13C	14D	15A	16A	17A	18B	19A	20C
21B	22A	23C	24C	25C	26A	27C	28B	29C	30D
31A	32A	33B	34D	35D	36C	37D	38D	39D	40B
41D	42C	43A	44B	45D	46A	47D	48B	49C	50B

Câu 1: Đáp án A.

Điều kiện $-3 \le x \le 3$

Xét hàm số $y = 2x + 3\sqrt{9-x^2}$ có $y' = 2 + \dfrac{3.(-2x)}{2\sqrt{9-x^2}} = 2 - \dfrac{3x}{\sqrt{9-x^2}}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 4.(9-x^2) = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 13x^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

Ta có $\min\limits_{[-3;3]} y = \left\{ f(-3); f\left(\dfrac{6}{\sqrt{13}}\right); f(3) \right\} = f(-3) = -6$.

Câu 2: Đáp án A.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = \left(2\sqrt{2}\right)^{x+2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4(2x-1)} = \left(\sqrt{2}\right)^{3x+6} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{4.(1-2x)} = \left(\sqrt{2}\right)^{3x+6}$$

$\Leftrightarrow 3x + 6 = 4 - 8x \Leftrightarrow x = \dfrac{-2}{11}$ (thỏa mãn).

Câu 3: Đáp án C.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}} = 1$;

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}} = -1.$$

Câu 4: Đáp án B.

Ta nhớ lại kiến thức về đường tiệm cận của đồ thị hàm phân thức mà tôi đưa ra ở chuyên đề đường tiệm cận, từ đây ta thấy

Với phương án B: Hàm phân thức $\dfrac{x^2}{x-1}$ có bậc của đa thức tử số lớn hơn bậc của đa thức mẫu số nên không có tiệm cận ngang.

Câu 5: Đáp án D

Suy luận

Xét hàm số $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 + x + m$.

Với $m = 1$ thì hàm số trên có dạng $y = x + 1$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đến đây ta loại được phương án B, C, A

Ta chọn luôn D.

Tuy nhiên trên đây là suy luận cho trắc nghiệm, ta có lời giải sau.

Lời giải

Với $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Với $m \ne 1$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc ba, để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

STUDY TIP:
Nhiều bài toán, chỉ cần sử dụng 1 dữ kiện là ta có thể loại hết các phương án sai, do đó trong quá trình làm bài, ta nên xét cùng với các phương án. Bởi trong tắc nghiệm, các phương án cũng là một dữ kiện.

$$\begin{cases} m-1>0 \\ b^2-3ac\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m-1)^2-3(m-1)\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m-1)(m-4)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m\le 4.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $1\le m\le 4$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 6: Đáp án B.

Điều kiện: $\begin{cases} x-3>0 \\ 3-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Câu 7: Đáp án C.

Lời giải

Đặt $z_0=1+i$, khi đó $z={z_0}^2+{z_0}^3+{z_0}^4+..+{z_0}^{22}$.

Ta có $z_0.z={z_0}^3+{z_0}^4+...+{z_0}^{23}$

Suy ra $z.z_0-z={z_0}^{23}-{z_0}^2 \Leftrightarrow z(z_0-1)={z_0}^{23}-{z_0}^2$

$$\Leftrightarrow z=\frac{{z_0}^{23}-{z_0}^2}{z_0-1}=\frac{(1+i)^{23}-(1+i)^2}{1+i-1}=-2050-2048i.$$

Vậy phần thực của số phức z là $x=-2050=-2^{11}-2$.

Câu 8: Đáp án D.

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó, theo đề bài ta có

$$\frac{z-1}{z-i}=\frac{x+yi-1}{x+yi-i}=\frac{(x-1)+yi}{x+(y-1)i}=\frac{\left[(x-1)+yi\right].\left[x-(y-1)i\right]}{\left[x+(y-1)i\right]\left[x-(y-1)i\right]}$$

$$=\frac{x(x-1)-(x-1)(y-1)i+xyi-y(y-1)i^2}{x^2+(y-1)^2}$$

$$=\frac{x(x-1)+y(y-1)+\left[xy-(x-1)(y-1)\right]i}{x^2+(y-1)^2}$$

Mà phần thực bằng 0, do đó $\dfrac{x(x-1)+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}=0\Leftrightarrow x^2-x+y^2-y=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$. Vậy đường tròn tâm $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 9: Đáp án A.

Đặt $u=2x-1\Rightarrow du=2dx$

$vdv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}$.

Khi đó $\int(2x-1)e^{-x}dx=(2x-1).(-e^{-x})+\int e^{-x}2dx$

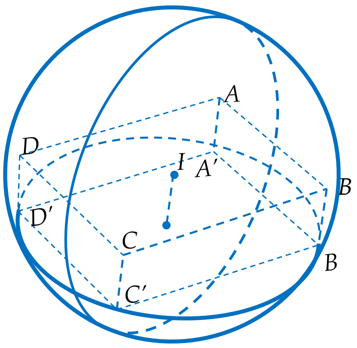
$=-(2x-1)e^{-x}-2e^{-x}+C=-(2x+1)e^{-x}+C$.

Câu 10: Đáp án A.

Ta có $d(A;(P))=\dfrac{\left|1+2.(-2)-2.(-3)+3\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=2$.

Câu 11: Đáp án B

Hình vẽ bên minh họa một hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp mặt cầu tâm I bán kính R.



STUDY TIP:
Cho hình hộp chữ nhật có 3 kích thước là a, b, c khi đó độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật được tính bằng công thức
$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

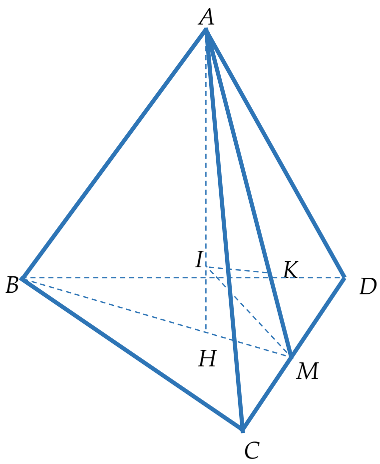
Vì tính đối xứng nên hình hộp nội tiếp khối cầu luôn là hình hộp chữ nhật. Do vậy đặt ba kích thước của hình hộp chữ nhật lần lượt là *a, b, c*.
Khi đó thể tích của hình hộp chữ nhật là $V=abc$.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có
$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$

$$\Leftrightarrow V^2=(abc)^2\le\left(\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\right)^3\Leftrightarrow V^2\le\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3=\left(\frac{(2R)^2}{3}\right)^3=\frac{64R^2}{27}$$

$$\Rightarrow V\le\sqrt{\frac{64R^6}{27}}=\frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$$

Chú ý: ở đây, do tính đối xứng nên hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu luôn có tâm là tâm của mặt cầu, do vậy độ dài đường chéo chính bằng đường kính của mặt cầu. Tương tự bài toán hình trụ nội tiếp khối cầu trong sách Bộ đề tinh túy môn toán 2017 mà tôi đã đưa ra.

Câu 12: Đáp án B.



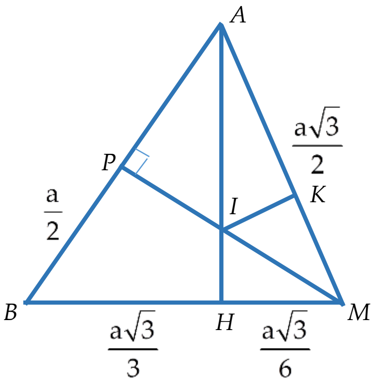
Kẻ *AH* vuông góc với (BCD), khi đó *AH* là đường cao của khối tứ diện *ABCD*.

Gọi *M* là trung điểm của *CD*. Trong tam giác *ABM*, đường phân giác của AMB cắt *AH* tại *I*, kẻ *IK* vuông góc với *AM* (như hình vẽ).
Do *ABCD* là tứ diện đều nên $BM\perp CD$, mặt khác $AH\perp CD$, từ đây suy ra $(ABM)\perp(ACD)$.

Ta có $\begin{cases}(ABM)\perp(ACD)\\(ABM)\cap(ACD)=AM\Rightarrow IK\perp(ACD).\\IK\perp AM\end{cases}$

Do *MI* là phân giác AMH vậy $IH=IK$ hay $d\left(I;(BCD)\right)=d\left(I;(ACD)\right)$.

Tương tự với các trường hợp còn lại ta suy ra *I* là tâm của mặt cầu nội tiếp khối tứ diện *ABCD*.



Ta có hình vẽ mặt phẳng *ABM* ở bên, *P* là giao điểm của *MP* và *AB*.
Nhận thấy tam giác *ABM* cân tại *M* (do *BM* = *AM*), từ đây suy ra phân giác *MI* là đường cao.

Ta có $MP=\sqrt{MB^2-BP^2}=\sqrt{\frac{a^2.3}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$

Hai tam giác *MHI* và *MPB* đồng dạng, suy ra

$$\frac{IH}{BP}=\frac{HM}{MP}\Rightarrow IH=\frac{HM.BP}{MP}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a}{2}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Vậy diện tích mặt cầu nội tiếp tứ diện *ABCD* là $S=4\pi R^2=4\pi.a^2.\frac{6}{144}=\frac{\pi a^2}{6}$.

Câu 13: Đáp án C.

Ta có $y'=x^2-2x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{2}\Rightarrow y=\dfrac{-8+4\sqrt{2}}{3}\\x=1+\sqrt{2}\Rightarrow y=-\dfrac{8+4\sqrt{2}}{3}\end{array}\right.$

Khi đó $d=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$.

Câu 14: Đáp án D.

Xét phương trình hoành độ $\left(x-1\right)e^x=x^2-1 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(e^x-x-1\right)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=\left(x-1\right)e^x, y=x^2-1$ được tính bằng công thức $S=\int_0^1\left|x^2-1-\left(x-1\right)e^x\right|dx$.

Nhận xét: trên $\left[0;1\right]$ thì $x^2-1\ge\left(x-1\right)e^x$ nên

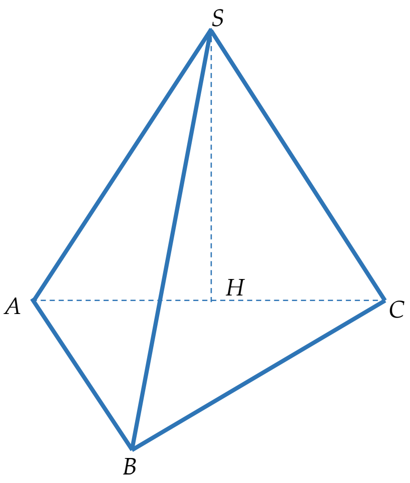
$$S=\int_0^1\left|x^2-1-\left(x-1\right)e^x\right|dx=\int_0^1\left(x^2-1-\left(x-1\right)e^x\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1\left(x-1\right)e^x dx=\frac{-2}{3}-\int_0^1\left(x-1\right)e^x dx$$

Đặt $u=x-1\Rightarrow du=dx$; $e^x dx=dv\Rightarrow v=e^x$

Khi đó $\int_0^1\left(x-1\right)e^x dx=\left(x-1\right).e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=-e+2$.

Vậy $S=e-\dfrac{8}{3}$



Câu 15: Đáp án A.

Tam giác SAB cân tại S có $\widehat{ASB}=60^\circ \Rightarrow$ tam giác SAB đều $\Rightarrow AB=a$.

Tam giác SBC vuông tại $S \Rightarrow BC=\sqrt{SC^2+SB^2}=a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lí hàm cos cho tam giác SAC ta có

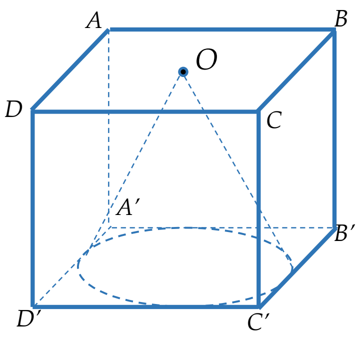
$AC=\sqrt{SA^2+SC^2-2.SA.SC.\cos 120^\circ}=a\sqrt{3}$.

Tam giác ABC có $AB^2+BC^2=a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2=3a^2=AC^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại B.

Gọi H là trung điểm của AC, suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mà tứ diện $SABC$ có $SA=SB=SC=a\Rightarrow SH$ là đường cao của tứ diện $S.ABC$.

Ta có $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{a}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$



Câu 16: Đáp án A.

Bài toán này tôi đã đưa ra trong sách độ đề tinh túy môn Toán năm 2017 (câu 38 đề 3) như sau:

Do đường tròn đáy của hình nón nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$ nên độ dài đường kính hình tròn $d=a\Rightarrow R=\dfrac{a}{2}$. Khi đó $V=\dfrac{1}{3}.a.\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\pi=\dfrac{a^3}{12}.\pi$

Câu 17: Đáp án A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $(x-1).e^{2x}=0 \Leftrightarrow x=1$. Vậy diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-1).e^{2x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=2$ được tính bởi công thức:

$$S=-\int_0^1 (x-1).e^{2x}dx+\int_1^2 (x-1).e^{2x}dx=\int_1^0 (x-1).e^{2x}dx+\int_1^2 (x-1).e^{2x}dx$$

Đặt $I_1=\int_1^0 (x-1).e^{2x}dx;\ I_2=\int_1^2 (x-1)e^{2x}dx$

Đặt $x-1=u \Rightarrow dx=du$; $vdv=e^{2x}dx \Rightarrow v=\frac{1}{2}.e^{2x}$

Khi đó $I_0=\frac{1}{2}.e^{2x}.(x-1)\Big|_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b e^{2x}.dx=\frac{1}{2}.e^{2x}.(x-1)\Big|_a^b-\frac{1}{4}.e^{2x}\Big|_a^b$.

Vậy từ đây ta có $I_1=-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}.e^0-\frac{1}{4}.e^2\right)=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}$.

$I_2=\frac{1}{2}.e^4-\left(\frac{1}{4}.e^4-\frac{1}{4}.e^2\right)=\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{4}$.

Suy ra $I=I_1+I_2=\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{2}-\frac{3}{4}$.

Câu 18: Đáp án B.

Ta có $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0 \Rightarrow$ tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=\sqrt{-9+1+4+9}=\sqrt{5}$.

Câu 19: Đáp án A.

Ta có $e^{x^2}=2x.e^{x^2}$.

Câu 20: Đáp án C.

Đường thẳng d đi qua hai điểm $A(-1;2;-4)$ và $B(1;0;2)$ có vtcp $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2;-2;6)=2(1;-1;3)$, vậy d có phương trình

$$d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{3}.$$

Câu 21: Đáp án B.

Xét phương trình $2^{(x-1)^2}=4^x$

Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

Ta có phương trình $\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}=2^{2x} \Leftrightarrow (x-1)^2=2x$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Câu 22: Đáp án A.

Gọi N là hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng

$$d:\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-2-2t \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$$

Khi đó $N(1+t;2+2t;-2-2t)\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(t+3;2t+1;-2t-1)$.

Ta có $MN \perp d \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow (t+3).1 + (2t+1).2 + (-2t-1).(-2) = 0$

$\Leftrightarrow 9t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-7}{9} \Rightarrow \overrightarrow{MN}\left(\frac{20}{9}; -\frac{5}{9}; \frac{5}{9}\right)$. Khi đó $\left|\overrightarrow{MN}\right| = d(M;d) = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

Câu 23: Đáp án C.

Đặt $u = \ln(2x-1) \Rightarrow du = \frac{2}{2x-1}dx;\ vdv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Khi đó $\int x\ln(2x-1)dx = \frac{x^2}{2}.\ln|2x-1| - \int \frac{x^2}{2}.\frac{2}{2x-1}dx$

$= \frac{x^2}{2}.\ln|2x-1| - \int \frac{x^2}{2x-1}dx = \frac{x^2}{2}.\ln|2x-1| - \int\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2x-1)}\right)dx$

$= \frac{x^2}{2}.\ln|2x-1| - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{8}.\ln|(2x-1)|\right) + C$

$= \frac{4x^2-1}{8}.\ln|2x-1| - \frac{x(x+1)}{4} + C$.

Câu 24: Đáp án C.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2x = -x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Khi đó thể tích khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x; y = -x^2$ quay quanh trục Ox được tính bởi công thức

$V = \pi\int_0^1 \left|\left(x^2-2x\right)^2 - \left(-x^2\right)^2\right|dx$

Ta thấy trên $[0;1]$ thì $\left(-x^2\right)^2 \le \left(x^2-2x\right)^2$, do vậy ta có công thức

$V = \pi\int_0^1 \left[-x^4 + \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right)\right]dx$

$= \pi\int_0^1 \left(-4x^3 + 4x^2\right)dx = \pi.\left(-x^4 + \frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$ (đvtt).

Câu 25: Đáp án C.

Ta có $\log_6 90 = \frac{\log 90}{\log 6} = \frac{\log(9.10)}{\log(2.3)} = \frac{\log 9 + \log 10}{\log 2 + \log 3} = \frac{2\log 3 + 1}{\log 2 + \log 3} = \frac{2b+1}{a+b}$.

Câu 26: Đáp án A.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Ta thấy hàm số đã cho là hàm số bậc ba có hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$.

Câu 27: Đáp án C.

Ta có $w = (1+i).(2-3i) - (2-i).(2+3i) = -2 - 5i$.

Vậy phần ảo của số phức w là -5.

Câu 28: Đáp án B.

Cách 1: Ta có $4^{x^2} - 2^{(x+1)^2} = 2x + 1 - x^2$

$\Leftrightarrow 4^{x^2} + 2x^2 = x^2 + 2x + 1 + 2^{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow 2^{2x^2} + 2x^2 = (x+1)^2 + 2^{(x+1)^2}$ $(*)$

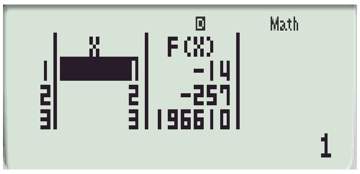
Xét hàm số $g(a)=2^a+a$ trên $\mathbb{R}$ có $g'(a)=2^a.\ln 2+1>0 \Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

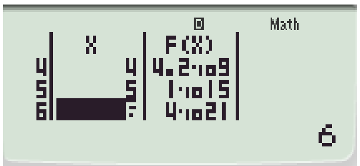
Vậy phương trình $(*)$ trở thành $g(2x^2)=g\left((x+1)^2\right)$

$$\Leftrightarrow 2x^2=x^2+2x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho chỉ có duy nhất một nghiệm dương.

Cách 2: Sử dụng TABLE.





Ta đặt $f(x)=4^{x^2}-2^{(x+1)^2}-2x-1+x^2$. Ở đây ta sử dụng nút TABLE bởi ta biết rằng, nếu hàm số $f(x)$ đổi dấu qua $x=c$ thì $x=c$ là nghiệm của phương trình $f(x)=0$. Do vậy, ta đi xét xem hàm số đổi dấu bao nhiêu lần trên $(0;+\infty)$.

Sử dụng nút TABLE:

1. MODE $\rightarrow$ 7:TABLE
2. Nhập biểu thức $f(x)$ vào, ấn =,
3. START? Chọn 1 =, END? 15 =, STEP? 1=, máy hiện như hình bên.

Nhận thấy hàm số chỉ đổi dấu trên khoảng từ 2 đến 3, từ 3 trở đi, giá trị của hàm số tăng dần, tức hàm số đồng biến trên $(3;+\infty)$. Vậy phương trình đã cho chỉ có duy nhất một nghiệm dương.

Câu 29: Đáp án D.

Điều kiện: $\begin{cases} x^3-2x>0 \\ 1+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2-2)>0 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{2} \\ -1<x<0 \end{array}\right.$

Ta có $\log_2(x^3-2x)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{1+x} \Leftrightarrow \log_2(x^3-2x)=2\log_2\sqrt{1+x}$

$\Leftrightarrow \log_2(x^3-2x)=\log_2(1+x) \Leftrightarrow x^3-2x=1+x \Leftrightarrow x^3-3x-1=0$, bấm máy ta thấy phương trình bậc ba này có 3 nghiệm, tuy nhiên, so sánh với điều kiện thì chỉ có hai nghiệm thỏa mãn, do vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Câu 30: Đáp án D.

Đặt $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$|x-2+(y-1)i|=|(x-(y-2)i)| \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1=x^2+y^2-4y+4$$

$$\Leftrightarrow -4x-2y+5=-4y+4 \Leftrightarrow 4x-2y-1=0.$$

Câu 31: Đáp án A.

Ta có $\mathrm{w}=i(-3-4i)+\dfrac{25}{-3-4i}=-3i-4i^2-\dfrac{25.(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}$

$$=-3i+4-\frac{75-100i}{9-16i^2}=-3i+4-\frac{75-100i}{25}=-3i+4-(3-4i)=1+i$$

$$\Rightarrow |\mathrm{w}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Câu 32: Đáp án A.

Ta có $d_1\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=-1-3t\end{cases};\begin{cases}x=-3+2t'\\y=-2+2t'\\z=-2-t'\end{cases}$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}-1+2t=-3+2t'\\1+t=-2+2t'\\-1-3t=-2-t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t-2t'=-2\\t-2t'=-3\\-3t+t'=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t'=2\end{cases}$.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất, suy ra hai đường thẳng này cắt nhau.

Câu 33: Đáp án B.

Chọn $B(3;-1;-1),C(1;0;0)$ là hai điểm nằm trên đường thẳng d, suy ra hai điểm A, B cũng nằm trong mặt phẳng (P) cần tìm.

Bài toán trở thành viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(3;1;0),B(3;-1;-1),C(1;0;0)$. Đây là dạng toán mà tôi đã đề cập rất chi tiết trong sách "Bộ đề tinh túy môn Toán năm 2017".

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]=(-1;2;-4)=-1(1;-2;4)$

mà mặt phẳng (P) chứa điểm $C(1;0;0)$ nên $(P):x-2y+4z-1=0$.

Câu 34: Đáp án D.

$I=\int(x-1)\sin 2xdx.$

Đặt $x-1=u\Rightarrow dx=du$; $\sin 2xdx=vdv\Rightarrow v=-\frac{1}{2}.\cos 2x$

Khi đó $F(x)=\frac{-(x-1)}{2}.\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=\frac{(1-x)\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}.\sin 2x+C$

$=\frac{(2-2x)\cos 2x+\sin 2x}{4}+C$.

Câu 35: Đáp án D

Với $x=1$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

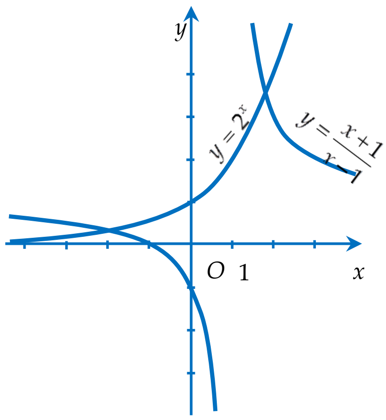
Với $x\neq 1$ thì phương trình $\Leftrightarrow 2^x=\frac{x+1}{x-1}$

Đặt $g(x)=2^x$; $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

Ta có hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Vậy phương trình $f(x)=g(x)$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên $(-\infty;1)$ và nhiều nhất 1 nghiệm trên $(1;+\infty)$. Khi bấm máy dò nghiệm thì thấy phương trình đã cho có 1 nghiệm trên $(-\infty;1)$ và 1 nghiệm trên $(1;+\infty)$.



Câu 36: Đáp án C.

Vậy $y=\sqrt{x.\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}}=\sqrt{x.\sqrt[3]{x.x^{\frac{1}{4}}}}=\sqrt{x.x^{\frac{5}{12}}}=\sqrt[24]{x^{17}}$.

Khi đó $y'=\left(\sqrt[24]{x^{17}}\right)'=\frac{17}{24}.\sqrt[24]{x^{-7}}=\frac{17}{24\sqrt[24]{x^7}}$.

Câu 37: Đáp án D.

Diện tích hình phẳng cần tìm được tính bằng công thức $S=\int_0^{\pi}\left|x.\sin 2x\right|dx$

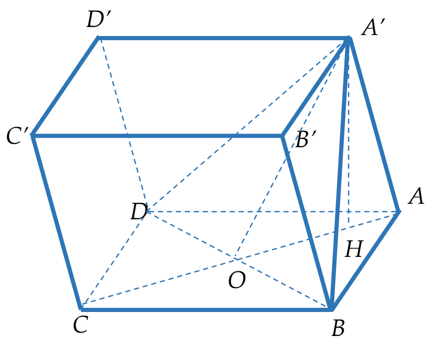
Xét phương trình $x.\sin 2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{\pi}{2}\\x=\pi\end{array}\right.$ (xét trên $\left[0;\pi\right]$).

Nên ta có $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x.\sin 2xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x.\sin 2xdx$.

Tương tự như bài 34 chỉ khác $x-1$ và x, do vậy ta có

$$S=\left.\frac{-2x\cos 2x+\sin 2x}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\left.\frac{-2x\cos 2x+\sin 2x}{4}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\pi\,(\text{đvdt}).$$

Câu 38: Đáp án D.



Ta dễ dàng nhận ra các mặt của hình hộp là hình thoi.

Trong mặt phẳng $\left(A'AC\right)$, kẻ $A'H\perp AC$ tại H.

Kí hiệu như hình vẽ.

Do các cạnh kẻ từ đỉnh A đôi một vuông góc, do vậy các tam giác $A'AB, A'AD, ABD$ là các tam giác đều. Do vậy $A'D=A'B=BD=a$, suy ra tam giác $A'BD$ đều $\Rightarrow A'O\perp BD$.

Ta có $\begin{cases}A'O\perp BD\\AC\perp BD\end{cases}\Rightarrow BD\perp\left(A'AC\right)\Rightarrow\left(A'AC\right)\perp\left(ABCD\right)$.

$\Rightarrow A'H\perp\left(ABCD\right)$.

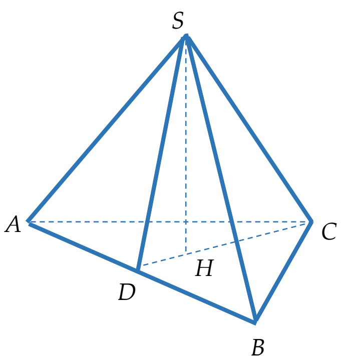
$\Rightarrow A'H$ là đường cao của khối hộp.

Ta có ABC là tam giác cân tại B có $ABC=120^\circ\Rightarrow AC=a\sqrt{3}$.

Tam giác $A'OA$ cân tại O, nên ta tìm được $A'H=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vậy $V=A'H.S_{ABCD}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 39: Đáp án D.



Kí hiệu như hình vẽ, theo đề bài ta có $SDH=60^\circ$

$\Rightarrow SH=DH.\tan 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3}=\frac{a}{2}$. Vậy $V=\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 40: Đáp án B.

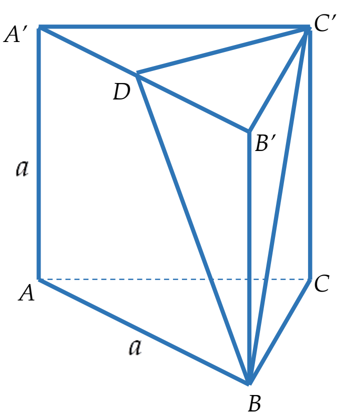
Điều kiện: $0<x<1$.

Phương trình $\Leftrightarrow\log_3\left(x^3+3x^2\right)=\log_3\left(x-x^2\right)\Leftrightarrow x^3+3x^2=x-x^2$

$\Leftrightarrow x^3+4x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\pm\sqrt{5}\end{array}\right.$, chỉ có một nghiệm thỏa mãn.

Phương trình vô nghiệm.

Câu 41: Đáp án D



Gọi D là trung điểm của $A'B'$. Khi đó $C'D\perp A'B'$ (do tam giác $A'B'C'$ cân tại C').

Ta có $\begin{cases} C'D \perp A'B' \\ B'B \perp C'D \end{cases} \Rightarrow C'D \perp \left(ABB'A'\right)$.

Khi đó $C'BD = \left(C'B, \left(A'B'BA\right)\right) = 60^\circ$.

$\Rightarrow C'D = BD.\tan 60^\circ = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}}.\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{2}.C'D.A'B'.A'A = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{15}}{2}.a.a = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$.

Câu 42: Đáp án C.

Ta có $y' = \dfrac{-3}{\left(2x-1\right)^2} \Rightarrow k = y'\left(-1\right) = \dfrac{-1}{3}$.

Câu 43: Đáp án A.

Ta có $y' = \left(2^{\sqrt{1-x}}\right)' = \left(\sqrt{1-x}\right)'.\ln 2.2^{\sqrt{1-z}} = \dfrac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}}.2^{\sqrt{1-x}}$.

Câu 44: Đáp án B.

Ta có $\left(x-1\right)^2.2^x = 2x\left(x^2-1\right) + 4.\left(2^{x-1} - x^2\right)$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2.2^x = 2x^3 - 2x - 4x^2 + 2^{x+1}$

$\Leftrightarrow 2^x.\left(x^2 - 2x + 1 - 2\right) = 2x.\left(x^2 - 2x - 1\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2x - 1\right).\left(2^x - 2x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \sum x = 5.$$

Câu 45: Đáp án D.

Ta có $\log_a b = \dfrac{\log_2 b}{\log_2 a} = \dfrac{\log_2 b}{\dfrac{16}{b}} = \dfrac{b}{4} \Leftrightarrow \log_2 b = 4 \Rightarrow b = 2^4$

$\Rightarrow \log_2 a = \dfrac{16}{16} = 1 \Rightarrow a = 2$. Vậy $a + b = 18$.

Câu 46: Đáp án A.

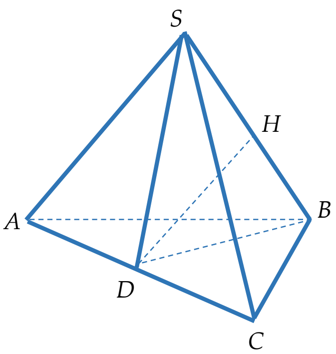
Điều kiện $\begin{cases} x^2 + 3x > 0 \\ \log\left(x^2 + 3x\right) \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -3 \end{array}\right. \\ x^2 + 3x \ge 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le -5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le -5 \end{array}\right.$

Câu 47: Đáp án D.

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - x^2}dx = \int \frac{1}{\left(a+x\right)\left(a-x\right)}dx = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right)dx \boxed{= \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C}$

Áp dụng vào bài ta chọn D.

Câu 48: Đáp án B.



Kẻ $DH \perp SB$

Đặt $AD = x \Rightarrow SD = \sqrt{a^2 - x^2} = BD \Rightarrow DH = \sqrt{SD^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - x^2}$

Ta thấy $V_{SABC} = 2V_{SABD}\left(1\right)$

Ta có $AD \perp BD; AD \perp SD \Rightarrow AD \perp \left(SBD\right)$

Vậy $V_{SABD} = \frac{1}{3}.AD.S_{SBD} = \frac{1}{3}.x.\frac{1}{2}.DH.SB \Rightarrow V_{SABC} = 2.\frac{1}{3}.x.\frac{1}{2}.a.\sqrt{\frac{3a^2}{4} - x^2}$

$= \frac{1}{3}.x.a.\sqrt{\frac{3a^2}{4} - x^2} \le \frac{1}{3}a.\frac{x^2 + \frac{3a^2}{4} - x^2}{2} = \frac{a^3}{8}$

Câu 49: Đáp án C

Đặt $z = x + yi, \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$.

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \left(y-1\right)^2} = \sqrt{\left(x-1\right)^2 + \left(y+2\right)^2}$

$\Leftrightarrow -2y + 1 = -2x + 1 + 4y + 4 \Leftrightarrow 2x - 6y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3y + 2$

Với $w = x' + y'i = \left(2 - i\right).z + 1 = \left(2 - i\right).\left(x + yi\right) + 1 = 2x + 2yi - ix + y + 1$

$= \left(2x + y + 1\right) + \left(2y - x\right)i$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = 2x + y + 1 = 2.\left(3y + 2\right) + y = 7y + 5 \\ y' = 2y - x = 2y - 3y - 2 = -y - 2 \end{cases} \Rightarrow x' + 7y' = -9 \Leftrightarrow x' + 7y' + 9 = 0$.

Câu 50: Đáp án B.

Điều kiện $0 < x < 8$.

Đặt $f\left(x\right) = 2^x; g\left(x\right) = \log_2\left(8 - x\right)$, xét hai hàm số này trên $\left(0;8\right)$, ta có

$f'\left(x\right) = 2^x.\ln 2 > 0 \forall x \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\left(0;8\right)$.

$g'\left(x\right) = -\frac{1}{\left(8 - x\right).\ln 2} < 0 \forall x \in \left(0;8\right) \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\left(0;8\right)$.

Suy ra phương trình $2^x = \log_2\left(8 - x\right)$ có nhiều nhất một nghiệm trên $\left(0;8\right)$.

Mà $\left[f\left(1\right) - g\left(1\right)\right].\left[f\left(2\right) - g\left(2\right)\right] < 0$ nên phương trình có duy nhất một nghiệm thực trên $\left(0;8\right)$.

P/s: *Hầu hết các dạng bài đều có trong "Bộ đề tinh túy Toán". Các em nhớ luyện tập hết mọi đề trong sách nhé. Ngoài ra, khai báo đầy đủ ở đây để chị gửi tài liệu, đề thi kèm theo: http://ngochuyenlb.gr8.com/*